平成２１年7月２１日　八起数学塾

２次形式

1　２次形式の定義

n 個の独立変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する斉次の２次式 $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ を２次形式と呼ぶ。

$a'_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ と置くと $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i,j} a'_{ij}x_ix_j$ であるから、初めから $a_{ij} = a_{ji}$ と仮定してよい。

さらに $A = (a_{ij})$（n 次行列)、$\boldsymbol{x} = (x_i)$（n 項列ベクトル）と置けば、$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ となるから、

２次形式はこのような行列積の形で考察することができる。ここで $a_{ij} = a_{ji}$ だから A は対称行列である。

2　２次形式の基本形

以下２次形式は実数体上で扱う。つまり a_{ij} は実数である。

A は実対称行列なので、適当な直交行列 U で

$$UA{}^tU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化できる。これから

$$A = {}^tU \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} U$$

従って

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tU \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} U\boldsymbol{x} = {}^t(U\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} U\boldsymbol{x}$$

ここで

$$U\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

と置けば、

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2$$

が得られる。つまり２次形式は適当な**直交行列**による斉１次変換で、$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2$ の形に標準化できることが分かる。

直交行列にこだわらなければ、もう少し標準化を進めることができる。$\mathrm{rank}A = m$ と置く。m が 0 でない α_i の個数に等しいことに注意せよ。必要ならば（置換行列が直交行列であることに注意して）y_i を並べ換えることによって、$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \neq 0$ かつ $\alpha_m + 1, \ldots, \alpha_n = 0$ となっているとして良い。ここで

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha_1|} & & & & & & \\ & \sqrt{|\alpha_2|} & & & \text{\huge 0} & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{|\alpha_m|} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \text{\huge 0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

と置けば、H は正則であり、従って HU も正則で、

$$HU\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha_1|}y_1 \\ \sqrt{|\alpha_2|}y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

とせよ、H, H^{-1} が対称行列であることに注意して、$\boldsymbol{x} = ^t UH^{-1}\boldsymbol{z}$ を ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に代入すると

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = ^t \boldsymbol{z}H^{-1}UA^tUH^{-1}\boldsymbol{z}$$

ここで

$$H^{-1}UA^tUH^{-1} = \begin{pmatrix} \pm1 & & & & & & \\ & \pm1 & & & \text{\huge 0} & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \pm1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & \text{\huge 0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

の形であるから

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{m} \pm\, z_i^2 (\text{但し } z_i \text{の符号は} \alpha_i > 0 \text{ なら } + \text{、} \alpha_i < 0 \text{ なら } -)$$

である。すなわち 2 次形式は適当な**正則行列**による斉 1 次変換で、$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \pm\, z_i^2$ の形に標準化できることが分かった。上記の正則行列 HU によって標準化した場合、$+z_i^2$ 項の数と $-z_i^2$ の項の数をそれぞれ m^+, m^- とすると、m^+ は A の正の固有値の個数、m^- は A の負の固有値の個数であり[*1]、$m^+ + m^- = \mathrm{rank}A$ となっている。他の正則行列によって $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \pm\, z_i^2$ の形の標準化を得た場合はどうであろうか。実はどのような正則行列によって標準化を得ても m^+, m^- は変わらない。それゆえ標準形は項の順序を除いて一意的に決まる。このことを主張するのが次の 3 節に述べる「シルヴェスタの慣性法則」である。

[*1] 但し固有値を数える場合は重複も勘定するものとする。

3　シルヴェスタの慣性法則

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

と置く。

B を正則行列とし、$\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$ という置き換えで

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i^2$$

となっているものとする。

必要ならば x_i, y_i を並べ換えて、

$$\begin{array}{lll} \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1} > 0 & \alpha_{m_1+1}, \ldots, \alpha_{m_2} < 0 & \alpha_{m_2+1}, \ldots, \alpha_n = 0 \\ \beta_1, \ldots, \beta_{l_1} > 0 & \beta_{l_1+1}, \ldots, \beta_{l_2} < 0 & \beta_{l_2+1}, \ldots, \beta_n = 0 \end{array}$$

であるとして良い。

この時 $m_1 = l_1, m_2 = l_2$ である。

証明)

仮に $m_1 > l_1$ として、「x_i」についての連立方程式、

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n) & = 0 \\ y_2 = y_2(x_1, \ldots, x_n) & = 0 \\ & \vdots \\ y_{l_1} = y_{l_1}(x_1, \ldots, x_n) & = 0 \\ x_{m_1+1} & = 0 \\ x_{m_1+2} & = 0 \\ & \vdots \\ x_n & = 0 \end{cases}$$

を考える。

$m_1 > l_1$ だから、等式の数よりも変数「x_i」の方が多いので、これは非自明解を持つ。この非自明解を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とする。a_i は上記の連立方程式の解なので、$a_{m_1+1} = a_{m_1+1} =, \ldots, = a_n = 0$ である。よって $a_1, \ldots, a_{m_1}$ の内の少なくとも 1 つは 0 でない。

また $y_1(a_1, \ldots, a_n) = y_2(a_1, \ldots, a_n) = \cdots = y_{l_1}(a_1, \ldots, a_n) = 0$ にも注意する。

この $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i^2$$

に代入すると左辺の正でない項はすべて消え、正の項のうち 1 つ以上の項が消えずに残る。従って左辺 > 0 である。一方右辺は正の項がすべて消えるので右辺 $\leqq 0$ となって矛盾である。よって $m_1 \leqq l_1$ でなければならない。

B は正則なので、$\boldsymbol{x} = B^{-1}\boldsymbol{y}$ であるから、x_i と y_i の立場を入れ替えることができ、$m_1 \geqq l_1$ が分かる。よって $m_1 = l_1$ である。また、等式の両辺に -1 を乗じて係数の符号を反転させた関係式を考えれば[*2]、$m_2 = l_2$ が得られる。
証明終わり。

4　まとめ

実係数の 2 次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ は適当な正則行列による斉 1 次変換によって

$$\sum_{i=1}^{m} \pm\, z_i^2$$

の形に標準化でき、また正則行列による斉 1 次変換によりこの形を得た場合は、常に $m = \mathrm{rank}A$ であり、さらに $+z_i^2$ の個数 m^+ は A の正の固有値の個数に等しく、$-z_i^2$ の個数 m^- は A の負の固有値の個数に等しい。従ってこの標準形は、項の順序を除いて一意的に定まる。

[*2] 正則行列を乗じても rank が変わらないことを使えば、$m_1 + m_2 = l_1 + l_2$ が分る。これを使って $m_1 = l_1$ から $m_2 = l_2$ を導いても良い。