

## 正値エルミート行列とアダマールの不等式

ベクトル  $x$  と  $y$  のエルミート積を  $(x|y)$  であらわす。以下複素行列で話を進めるが、エルミート行列、ユニタリ行列とあるところを、それぞれ対称行列、直交行列に置き換えれば実行列の話としてそのまま成り立つ。

### 1 準備

#### 1.1 2次式の簡単な変形と行列

$A$  を  $n$  次正則行列、 $B_1, B_2$  をそれぞれ  $(n, m), (m, n)$  型行列、 $C$  を  $m$  次正方行列、 $E_n, E_m$  をそれぞれ  $n$  次と  $m$  次の単位行列とすると、以下の等式が成り立つ。(なお言うまでもなく、 $O$  はやや省略した記法だが、その部分の成分がすべて0であるという意味である。)

$$\begin{pmatrix} A & B_1 \\ B_2 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ B_2 A^{-1} & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & C - B_2 A^{-1} B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & A^{-1} B_1 \\ O & E_m \end{pmatrix}$$

この式は計算すれば簡単に確かめられるが、どこからこんな式が出てきたのか気になる向きもあるかと思われるので、1つの説明を試みる。(中にはこの程度の等式なら何ら前提なしに思いつくという人もいるかもしれないが、一般的にはそうはいかないだろう。もちろん私には無理である。)

線型代数では、対称行列の対角化を応用して2次形式の標準形についての議論を行う。(この点について知らない人は、単に行列の話を2次式の変形に応用できるのだと思ってもらえればそれでよい。)

上の式は、この逆に「2次式の変形の結果を行列に焼き直す」ことで比較的自然に予想可能である。

2次式  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  を考えて、 $x$  に関して完全平方式を作ると

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x + a^{-1}by)^2 + (c - a^{-1}b^2)y^2$$

であるが、この等式を行列であらわすと次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x + a^{-1}by & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c - a^{-1}b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + a^{-1}by \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c - a^{-1}b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここから  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c - a^{-1}b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  が自然に見て取れるだろう。

ここまでくれば、この式から水平思考で始めの式に到達することは、決して困難ではないし、必要なら次の式を経由しても良い。

$$\begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c - a^{-1}b_1b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注：この式は、 $ax^2 + (b_1 + b_2)xy + cy^2 = a(x + a^{-1}b_1y)(x + a^{-1}b_2y) + (c - a^{-1}b_1b_2)y^2$  に対応している。

## 1.2 エルミート行列の固有値

以下が成り立つ

1. エルミート行列の固有値は実数である
2. 半正値エルミート行列の固有値は0または正の実数である
3. 正値エルミート行列の固有値は正の実数である

証明.  $A$  をエルミート行列、 $\alpha$  を  $A$  の固有値、 $x$  を  $\alpha$  に対応する固有ベクトルとする。

$(Ax|x) = (\alpha x|x) = \alpha(x|x)$  また、 $(Ax|x) = (x|Ax) = (x|\alpha x) = \bar{\alpha}(x|x)$  であるから

$\alpha(x|x) = \bar{\alpha}(x|x)$  ここで  $x \neq 0$  だから  $(x|x) > 0$  特に  $(x|x) \neq 0$  なので  $\alpha = \bar{\alpha}$

従って  $\alpha$  は実数である。

$A$  が半正値なら  $\alpha(x|x) = (Ax|x) \geq 0$  で  $(x|x) > 0$  より  $\alpha \geq 0$

$A$  が正値なら同様にして  $\alpha > 0$  である。

□

注意：エルミート行列がユニタリ行列によって対角化できるという事実を使えば、2. 3. の逆が成り立つことも容易に示せる。

系：正値エルミート行列の行列式は正である。特に正値エルミート行列は正則である。

証明. 行列式は固有値の積であるから 3. によって正である。

□

注意：正値エルミート行列が正則であることのみを証明するのならば、以下のようにもできる。

行列  $A$  が正則であることを示すためには、任意のベクトル  $x$  に対して  $Ax = 0$  ならば、 $x = 0$  を示せばよい。 $Ax = 0$  ならば、 $(Ax|x) = 0$  であるが、 $A$  が正値エルミート行列であれば、これは  $x = 0$  を意味する。

## 1.3 正値エルミート行列の逆行列

前節で述べたように正値エルミート行列は正則である。さらに以下の命題が成り立つ。

命題： $A$  が正値エルミート行列ならば  $A^{-1}$  も正値エルミート行列である。

証明.  $0$  でない任意のベクトル  $x$  に対して  $(A^{-1}x|x) = (x|A^{-1}x) > 0$  が成り立つことを示せば十分である。 $(A^{-1}x|x) = (A^{-1}x|AA^{-1}x) = (AA^{-1}x|A^{-1}x) = (x|A^{-1}x)$  ここで  $x \neq 0$  より  $A^{-1}x \neq 0$  なので、 $(AA^{-1}x|A^{-1}x) > 0$  よって主張が示された。

□

## 1.4 正値エルミート行列の対角成分の積と行列式

2 次のエルミート行列は、一般に  $a, c$  を実数  $b$  を複素数として  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$  と書ける。

$\det A = ac - |b|^2$  だから、2 次の場合は「エルミート行列の行列式  $\leq$  エルミート行列の対角成分の積」となる

ことが分る。

しかし行列  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  (これは実対称行列だからエルミート行列である。) を考えると、

$\det B = 2$  で、対角成分の積  $= 0$  だから、3 次の場合上記不等式は成り立たない。

この点に関して成り立つのは次の命題である。

命題:  $(a_{ij})$  を  $n$  次の正値エルミート行列とすれば、 $\det(a_{ij}) \leq a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$  である。

証明. 次数  $n$  に関する帰納法で示す。まず  $n = 1$  の場合は明白である。 $n - 1$  次までは正しいとものする。

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{b} \\ {}^t\bar{\mathbf{b}} & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ とあらわす。}$$

ここで、 $A_{n-1}$  がエルミート行列であることは、 $(a_{ij})$  がエルミート行列であることから明らかである。

また、 $\mathbf{x}_{n-1}$  を 0 でない  $n - 1$  次列ベクトルとすると、 $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$  は 0 でない  $n$  次列ベクトルで

あつて、 $(A_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}|\mathbf{x}_{n-1}) = (A_n\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_n) > 0$  だから正値である。

よってさらに 1.2 の系から正則であることも分る。

従って 1.1 から

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{b} \\ {}^t\bar{\mathbf{b}} & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} \\ {}^t\bar{\mathbf{b}}A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - {}^t\bar{\mathbf{b}}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで } \det \begin{pmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} \\ {}^t\bar{\mathbf{b}}A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ および}$$

$$\det \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - {}^t\bar{\mathbf{b}}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} = \det A_{n-1} \cdot (a_{nn} - {}^t\bar{\mathbf{b}}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b}) \text{ に注意すれば、}$$

$\det(a_{ij}) = \det A_{n-1} \cdot (a_{nn} - {}^t\bar{\mathbf{b}}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b}) = \det A_{n-1} \cdot (a_{nn} - (A_{n-1}^{-1}\mathbf{b}|\mathbf{b}))$  となることが分る。

再び 1.2 の系から  $\det(a_{ij}) > 0$  かつ  $\det A_{n-1} > 0$  であり、また 1.3 より  $A_{n-1}^{-1}$  が正値エルミート行列なので、 $(A_{n-1}^{-1}\mathbf{b}|\mathbf{b}) \geq 0$  である。よって、 $\det(a_{ij}) \leq \det A_{n-1} \cdot a_{nn}$  かつ  $a_{nn} > 0$  が分る。

最後に帰納法の仮定によって  $\det A_{n-1} \leq a_{11}a_{22} \dots a_{n-1,n-1}$  だから  $\det(a_{ij}) \leq a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$  が示された。

□

## 2 アダマールの不等式

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  を平面上のベクトルとする。 $\mathbf{a}_1$  と  $\mathbf{a}_2$  の始点を同じ点にとって、それらを 2 辺とする平行四辺形を考え、その面積を  $\mu(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  とする。ここで  $\mu$  が多重線型性を持つこと、また  $\forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  につい

て  $\mu(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2) = \mu(\mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_1)$  および  $\forall \mathbf{a}_1$  について  $\mu(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_1) = 0$ 、さらに標準基底  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$  に対して  $\mu(\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) = 1$  となることから、 $\mu(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2) = |\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)|$  が分る。これは  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  を空間内のベクトルとして、平行六面体の体積を考えても同様である。そしてこの事情は高次元へ拡張される。つまり  $n$  次元ベクトル  $\mathbf{a}_i$  に対して、 $|\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n)|$  が平行超  $2n$  面体 (4次元なら平行八胞体) の超体積を与える。この幾何学的なイメージから次の不等式が予想できる。これをアダマールの不等式と呼ぶ。

$$\text{アダマールの不等式} : |\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n)| \leq \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \dots \|\mathbf{a}_n\|$$

証明.  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$  と置く。

$A$  が正則でなければこの等式は明白である。

$A$  が正則な場合を考える。 $A^*A$  はエルミート行列であるが、さらに  $\mathbf{0}$  でない任意のベクトル  $\mathbf{x}$  に対して  $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  なので、 $(A^*A\mathbf{x}|\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}|A\mathbf{x}) > 0$  従って正値である。

よって 1.4 の命題から  $\det(A^*A) \leq \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 \dots \|\mathbf{a}_n\|^2$

また  $\det(A^*A) = (\det A^*)(\det A) = (\overline{\det A})(\det A) = |\det A|^2$  なので、所望の不等式を得る。

□