

ハミルトン・ケイリーの定理

以下特に断らない限り、 n を固定し、 n 次正方行列を単に行列、 n 次列ベクトルを単にベクトルと呼ぶ。また E は単位行列を表す。

1 行列を多項式に「代入」すること

$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ を一変数多項式とし、 A 行列とする。このとき

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

で $f(A)$ を定義する。ここで、 $a_0 E$ の部分に注意。

以下の代入則が成り立つ。

$f(x) = cg(x)$	なら	$f(A) = cg(A)$
$f(x) = g(x) + h(x)$	なら	$f(A) = g(A) + h(A)$
$f(x) = g(x)h(x)$	なら	$f(A) = g(A)h(A)$

2 ハミルトン・ケイリーの定理

定理:(ハミルトン・ケイリーの定理)

A の固有多項式を $\Phi_A(x)$ とすると $\Phi_A(A) = O$ が成り立つ。

注意: $\Phi_A(x) = \det(xE - A)$ である。この x に形式的に A を代入して、

$$\Phi_A(A) = \det(AE - A) = \det O = 0$$

などとしてはいけない。

そもそも左辺の $\Phi_A(A)$ は行列で、右辺の 0 はスカラーだから、(A が一次でしかもそれをスカラーと同一視するのでない限り) 初めから等式として成立していない。

ハミルトン・ケイリーの定理を正しく理解するために、上記の誤りがどこから来るのかを説明する。

1 節で述べた様に、 $f(x) = g(x)h(x)$ 等の場合には、単純に x を A で置き換えてかまわないが、 $\det(xE - A)$ の x を A で置き換えるのは問題がある。

$g(x)h(x)$ と $g(A)h(A)$ を比べた場合、 x と A は同じ代数規則に従って計算できることがわかる。それ故 $f(x) = g(x)h(x)$ の x に A を代入してよいのである。

しかし $f(x, y) = g(x, y)h(x, y)$ の x, y に勝手な A, B を代入するわけにはいかない。乗法に関して x と y は可換だが、 A と B は一般には非可換だからである。もちろん A と B が可換であれば代入してよい。

これに対して $\det(xE - A)$ を計算する場合は、行列 $xE - A$ の内部構造が問題になる。 $AE - A$ は外見からすれば、 $xE - A$ の x を A で置き換えた形だが、それを行列の成分のレベルで見るとそうはなっていない。

実際 $A = (a_{ij})$ とすると

$$xE - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

一方

$$AE - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

となって、行列の成分のレベルでは x を A で置き換えた形にはなっていないことがわかる。これが誤りの原因である。要するに記号法の「あや」である。

行列式の計算はこの行列の成分に対して代数演算を行うのであるから、もし x を A で置き換えるのならばこのレベルで置き換えなければいけない。

「行列の成分はスカラーだから、ここの x を A で置き換えるのはおかしい。」「行列引くスカラーの意味がわからない。」

といった細かいことは考えずに、ともかく x を A で置き換え、更にそれを (A をスカラーであるかのごとく考えて) 形式的に計算すれば、

$$\det \begin{pmatrix} A - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & A - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & A - a_{nn} \end{pmatrix} = f(A)$$

となって正しい結果^{*1}が得られる。

ハミルトン・ケイリーの定理はこの $\det \begin{pmatrix} A - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & A - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & A - a_{nn} \end{pmatrix}$ が 0 になることを主張しているのである。

3 ハミルトン・ケイリーの定理の証明

ハミルトン・ケイリーの定理の証明を二つ紹介する。

初めのもは線型代数の教科書でよく見かける証明であり、二番目のものは、可換環論で有限生成加群におけるハミルトン・ケイリーの定理 (と同等の命題) の証明に使われるやり方である。一見すると二番目のやり方は何か非常に高度な証明に見えるかもしれないが、中身は (巧妙だが) 単なる計算であって、むしろ初めのものよりも簡明である。

^{*1} 左辺は $A^n - \text{tr}(A)A^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$ だが、 $\det(A)$ の部分は $\det(A)E$ と解釈するものとする。

3.1 ハミルトン・ケイリーの定理の証明その1

3.1.1 準備

行列 A の余因子行列を \tilde{A} であらわすと以下の式が成り立つ。

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)E$$

これは行列式の多重線形性を使って証明できるが、行列式および余因子行列の定義、そして行列式の多重線形性とその証明、更に上記の式の証明のいずれについても割り算（乗法逆元の存在）が不要であることに注意する。

変数 x の（1変数）多項式（以下 x の多項式と呼ぶ）を成分とする行列を考えよう。多項式は乗法逆元の存在に係らない限り、数と同じ計算規則を満たす。よって多項式を成分とする行列も、通常の数成分とする行列と同様の計算規則を（乗法逆元の存在に係らない限り）満たす。特に上記の $\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)E$ は A が多項式の行列であっても成り立つ。

数を成分とする行列に数を乗することができるように、多項式を成分とする行列にも多項式を乗することができる。この計算規則も数を成分とする行列に数を乗する場合と（乗法逆元の存在に係らない限り）同じである。

また、数は多項式の特別なものと考えてよい。よって数を成分とする行列も、多項式を成分とする行列の特別なものと考えてよい。

$A(x)$ を多項式を成分とする行列とし、 m をその成分の多項式の次数の最大の次数（但しこの話に限って0の次数も他の数と同様に0とする）とすれば、数を成分とする行列 $A_m, A_{m-1}, \dots, A_1, A_0$ が一意的に存在して

$$A(x) = x^m A_m + x^{m-1} A_{m-1} + \dots + x A_1 + A_0$$

と書ける。これは次の例から明らかであろう。

例

$$\begin{pmatrix} x^2 + 2 & 3 \\ 4x + 5 & 6x^3 + 7x^2 \end{pmatrix} = x^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.2 証明

多項式を成分とする行列 $xE - A$ の余因子行列を

$$B(x) = x^{n-1} B_{n-1} + x^{n-2} B_{n-2} + \dots + x B_1 + B_0 \quad (\text{但し } B_i \text{ は数を成分とする行列})$$

と置き、

$$\Phi_A(x) = \det(xE - A)$$

と置けば

$$A(x)E = (xE - A)B(x) = B(x)(xE - A)$$

が成り立つ。

$$(xE - A)B(x) = x^n B_{n-1} + x^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \cdots + x(B_0 - AB_1) + AB_0 \quad (1)$$

$$B(x)(xE - A) = x^n B_{n-1} + x^{n-1}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + \cdots + x(B_0 - B_1A) + B_0A \quad (2)$$

だから係数を比較すると、すべての B_i に対して $AB_i = B_iA$ が成り立っていることがわかる。もちろん E も A と交換可能であるから、等式 ${}_A(x)E = (xE - A)B(x)$ の x に A を代入してよいことがわかる（記号法の「あや」が生じないことに注意せよ）。

従って $\Phi_A(A) = {}_A(A)E = (AE - A)B(A) = OB(A) = O$ が示された。

3.2 ハミルトン・ケイリーの定理の証明その2

3.2.1 準備

上記 3.1.1 の証明の中身は余因子行列を利用した計算であった。今回もやはり余因子行列を利用した計算であるが、今回の計算は前回のそれよりもっと「外側」での計算となる。

上記 3.1.1 の証明では多項式を成分とする行列を考え、ここでは行列を成分とする行列とベクトルを成分とするベクトルを考え、それぞれ「行列の行列」「ベクトルのベクトル」と呼ぶことにする。これらに対して、通常の行列やベクトルに対して定義するのと同じように和と積を定義する。また通常の行列やベクトルに対して「スカラー倍」を定義するのと同様に行列の行列やベクトルのベクトルの「行列倍」を定義する。このように定義すると、結合法則や、分配法則が通常の行列やベクトルおよびスカラーのそれと同様に成り立つ。

行列の行列の成分（つまり通常の行列）がすべて互いに可換であれば、「余因子行列」や「行列式」が定義でき、それらは通常のそれと同じ法則を満たすことがわかる。ここで余因子行列の成分および行列式（この場合いずれも通常の行列）は元の行列の行列の成分の多項式であり、元の行列の行列の成分は互いに可換であるから、元の行列の行列の成分、余因子行列の成分、行列式はすべて互いに可換である。

3.2.2 証明

$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ を K^n の標準基底とし、 $A = (a_{ij})$, ${}^tA = (a_{ij}E)$ と置き、さらに \mathbb{E} を対角成分がすべて E で、その他の成分がすべて O である行列の行列とする。（クロネッカーのデルタを使えば $\mathbb{E} = (\delta_{ij}E)$ ）。いうまでもなく、 \mathbb{E} は通常の行列の単位行列に相当する行列の行列である。

$A, a_{ij}E, E$ が互いに可換であることに注意せよ。以下ではこのことをあらゆる場面で利用するが、いちいち断らない（要するに通常の行列、ベクトル、スカラーに対するのと同様の議論ができるということを確認しておけばよい）。

$Ae_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots + a_{ni}e_n$ であるから、これは前の 3.2.1 で述べた行列の行列とベクトルのベクトルを使えば、

$$\begin{pmatrix} Ae_1 \\ \vdots \\ Ae_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}E & \cdots & a_{n1}E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}E & \cdots & a_{nn}E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad \text{つまり} \quad A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

と表すことができる。ここから

$$({}^tA - A) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{但し } \mathbf{0} \text{ は、その成分がすべて } 0 \text{ であるベクトルのベクトル})$$

また

$$(A\mathbb{E} - {}^t\mathbb{A})^{-1} \left((A\mathbb{E} - {}^t\mathbb{A}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \right) = \left((A\mathbb{E} - {}^t\mathbb{A})^{-1} (A\mathbb{E} - {}^t\mathbb{A}) \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = (\det(A\mathbb{E} - {}^t\mathbb{A})\mathbb{E}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

ここで

$$\det(A\mathbb{E} - {}^t\mathbb{A}) = \det {}^t(A\mathbb{E} - \mathbb{A}) = \det(A\mathbb{E} - \mathbb{A})$$

に注意すれば結局

$$\begin{pmatrix} \det(A\mathbb{E} - \mathbb{A})e_1 \\ \vdots \\ \det(A\mathbb{E} - \mathbb{A})e_n \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

従って任意の $i (1 \leq i \leq n)$ に対して $\det(A\mathbb{E} - \mathbb{A})e_i = 0$ である。ここで $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ は基底であるから $\det(A\mathbb{E} - \mathbb{A}) = \Phi_A(A)$ は零行列である。

証明終わり。

注意：上記 ${}^t\mathbb{A}$, ${}^t(A\mathbb{E} - \mathbb{A})$ はそれぞれ \mathbb{A} , $A\mathbb{E} - \mathbb{A}$ を転置（成分（通常の行列）の位置は転置するが、成分の行列そのものは転置しない）した行列の行列、 $(A\mathbb{E} - {}^t\mathbb{A})^{-1}$ は $A\mathbb{E} - {}^t\mathbb{A}$ の余因子行列を表す。